

Álgebra, Grupos y Representaciones

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Álgebra, Grupos y Representaciones

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Irina Kuzyshyn Basarab

Granada, 2025-26

Índice general

1. Relaciones de Ejercicios	5
1.1. Parte 1	5

1. Relaciones de Ejercicios

1.1. Parte 1

Ejercicio 1.1.1. Sea A un anillo. Diremos que A es trivial si $A = \{0\}$. Demostrar que A es trivial si, y solo si, $1 = 0$.

Solución:

$\implies$) Es claro, ya que $A = \{0\}$.

$\impliedby$) Sea $a \in A$, tenemos que $a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0 \implies a = 0$. Por tanto, A es trivial.

Ejercicio 1.1.2. Sea K un cuerpo y $M_n(K)$ el anillo de matrices cuadradas de orden n con entradas en K . Demostrar que $Z(M_n(K)) = \{kI_n | k \in K\}$, donde I_n es la matriz identidad de orden n .

Solución:

Está claro que el conjunto definido está dentro del centro. Sea $A \in M_n(K)$, $k \in K$:

$$kI_n A = kA = kAI_n = AkI_n$$

Ahora debemos ver que si $A \in Z(M_n(K)) \implies A = kI_n$. Defino la matriz $E_{ml} = (e_{ij}) \in M_n(K)$ tal que $e_{ij} = 1$ si $i = m$ y $j = l$ y $e_{ij} = 0$ en otro caso. Sea ahora $A \in M_n(K)$. Vamos a igualar $E_{ml}A = AE_{ml}$ y vamos a sacar condiciones para la A . Veremos que si tomamos $m, l \in \{1 \dots n\}$, $A = (a_{ij})$ deberá ser de la forma kI_n con $k \in K$.

Sea $(c_{ij}) = E_{ml}A$.

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^n e_{it}a_{tj} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq m \\ a_{lj} & \text{si } i = m \end{cases}$$

Sea ahora $(d_{ij}) = AE_{ml}$.

$$d_{ij} = \sum_{t=1}^n a_{it}e_{tj} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq l \\ a_{im} & \text{si } j = l \end{cases}$$

Ahora, si forzamos a que sean iguales tenemos los siguientes casos:

$$\begin{aligned} a_{lj} &= 0 \text{ si } i = m \wedge j \neq l \\ a_{im} &= 0 \text{ si } i \neq m \wedge j = l \\ a_{lj} &= a_{im} \text{ si } i = m \wedge j = l \text{ es decir } a_{ll} = a_{mm} \\ 0 &= 0 \text{ si } i \neq m \wedge j \neq l \end{aligned}$$

De esta forma vemos que todos los elementos de la diagonal deben ser iguales y todos los que no son de la diagonal deben anularse, es decir:

$$A = kI_n \text{ con } k \in K$$

Ejercicio 1.1.3. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K . El conjunto

$$\text{End}_K(V) = \{f : V \rightarrow V : f \text{ es } K\text{-lineal}\}$$

es un subanillo de $\text{End}(V)$. Consideramos la aplicación $h : K \rightarrow \text{End}_K(V)$ que asigna a cada $k \in K$ la homotecia $h(k) : V \rightarrow V$, definido por $h(k)(v) = kv \forall v \in V$. Comprobar que h está bien definida y que es un homomorfismo de anillos.

Además, si $T : V \rightarrow V$ K -lineal y $k \in K$, tenemos que $T \circ h(k) = h(k) \circ T$, luego $\text{Im}(h) \subset Z(\text{End}_K(V))$. Y así $\text{End}_K(V)$ es una K -álgebra.

Solución:

- Para ver que es un subanillo lo que falta ver es que las operaciones sacan los escalares, sean $f, g \in \text{End}_K(V)$

$$\begin{aligned}(f - g)(kv) &= f(kv) - g(kv) = kf(v) - kg(v) = k(f - g)(v). \\ (f \circ g)(kv) &= f(g(kv)) = f(kg(v)) = kf(g(v)) = k(f \circ g)(v)\end{aligned}$$

- Para ver que h está bien definida debemos comprobar que fijado $k \in K$, saca escalares, pues ya sabemos que es homomorfismo de grupos.

$$h(k)(jv) = kjv = jkv = jh(k)(v) \quad \forall j \in K$$

- Si definimos $h : K \rightarrow \text{End}(V)$, esto nos da la estructura de K -módulo, por lo que es un homomorfismo de anillos, y esto no se pierde al restringir el codominio.
- Veamos la última afirmación del enunciado:

$$(h(k) \circ T)(v) = h(k)(T(v)) = kT(v) = T(kv) = T(h(k)(v)) = (T \circ h(k))(v)$$

Por tanto, $h(k)$ conmuta con todo endomorfismo K -lineal, por lo cual el resto de afirmaciones ya son claras, con la estructura de K -álgebra definida por el homomorfismo h .

Ejercicio 1.1.4. Supongamos que A y B son K -álgebras con morfismos de estructura $\rho_A : K \rightarrow A$ y $\rho_B : K \rightarrow B$. Sea $\phi : A \rightarrow B$ un homomorfismo de anillos. Demostrar que ϕ es homomorfismo de K -álgebras si, y sólo si, $\phi \circ \rho_A = \rho_B$.

Solución:

$\Rightarrow$) $\phi(\rho_A(k)) = \phi(k1_A) \stackrel{(*)}{=} k\phi(1_A) = k1_B = \rho_B(k) \forall k \in K$. Donde en $(*)$ hemos usado que ϕ es K -lineal.

$\Leftarrow$) Nos falta ver que ϕ es K -lineal, en particular, que saca escalares. Sea $k \in K$ y $a \in A$:

$$\phi(ka) = \phi(k1_A a) = \phi(k1_A)\phi(a) = \phi(\rho_A(k))\phi(a) \stackrel{(*)}{=} \rho_B(k)\phi(a) = k1_B\phi(a) = k\phi(a),$$

donde en $(*)$ hemos usado la hipótesis.

Ejercicio 1.1.5. Sea A un espacio vectorial sobre un cuerpo K , y fijemos esta estructura. La acción de un escalar de K sobre un vector de A se denotará por yuxtaposición. Demostrar que dar una estructura de K -álgebra asociativa unital sobre A es equivalente a dar una multiplicación asociativa $*$: $A \times A \rightarrow A$ y K -bilineal junto con una aplicación K -lineal $\eta : K \rightarrow A$ tal que $\eta(k) * a = a * \eta(k)$ para todo $k \in K, a \in A$.

Solución:

Ejercicio 1.1.6. Comprobar todas las afirmaciones hechas en el Ejemplo 1.11.

Ejercicio 1.1.7. Sea K un cuerpo. Dar la lista, salvo isomorfismos, de todas las K -álgebras asociativas unitales de dimensión 2.

Ejercicio 1.1.8. Expresar el cuerpo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ como una $\mathbb{Q}$ -subálgebra de un álgebra de matrices sobre $\mathbb{Q}$.

Solución: Por conocimientos de Álgebra III, sabemos que una $\mathbb{Q}$ -base de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es $\{1, \sqrt{2}\}$. Sea pues el homomorfismo de estructura de $\mathbb{Q}$ -módulo $\lambda : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \text{End}(\mathbb{Q})$. Sea $a = \alpha + \beta\sqrt{2}$, veamos cuales son las imágenes de los elementos de la base por $\lambda(a)$:

$$\begin{aligned}\lambda(a)(1) &= a = \alpha + \beta\sqrt{2} \\ \lambda(a)(\sqrt{2}) &= \alpha\sqrt{2} + 2\beta\end{aligned}$$

Si ahora esto lo escribimos en coordenadas de la base que tenemos, obtenemos lo siguiente:

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Por tanto, obtenemos que:

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\} \subset M_2(\mathbb{Q})$$

Ejercicio 1.1.9. Sea

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

1. Demostrar que $\mathbb{H}$ es un subálgebra real de $M_2(\mathbb{C})$ y que $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$.
2. Demostrar que todo elemento no nulo de $\mathbb{H}$ es una unidad.
3. Demostrar que las matrices TODO: meter aqui las matrices forma una base de $\mathbb{H}$ como espacio vectorial real.
4. Comprobar las identidades: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k, jk = i, ki = j$.

Ejercicio 1.1.10. Dado un A -módulo V no nulo, demostrar que

$$\text{Ann}_A(V) = \{a \in A : av = 0 \ \forall v \in V\}$$

es un ideal de A . Dotar a V de estructura de $A/\text{Ann}_A(V)$ -módulo fiel.

Solución: Vamos a probar que es un ideal de A :

Cerrado para producto por elementos de A : Sea $a, c \in A, m \in M$:

$$(ca)m = c(am) = c0 = 0$$

$$(ac)m = a(cm) = 0$$

En el segundo caso $cm \in M$, por lo que tenemos el resultado.

Subgrupo aditivo de A : Sean $a, b \in \text{Ann}_A(V)$:

$$(a - b)m = am + (-b)m = 0 + (-1b)m = 0$$

La última igualdad se debe al punto anterior y que $-1 \in A$.

Ahora debemos dotar a V de estructura de $A/\text{Ann}_A(V)$ -módulo. Sabemos que es A -módulo, luego existe un homomorfismo de anillos: $\phi : A \rightarrow \text{End}(V)$ definido por $\phi(a)(v) = a \cdot v$, siendo $\cdot$ el producto de escalares. Bien, pues veamos que $\text{Ann}_A(V) = \ker(\phi)$.

$$a \in \ker(\phi) \iff 0 = \phi(a)(v) = av \quad \forall v \in V \iff a \in \text{Ann}_A(V)$$

Ejercicio 1.1.11. Dar una demostración del Lema 1.4.2.

Ejercicio 1.1.12.